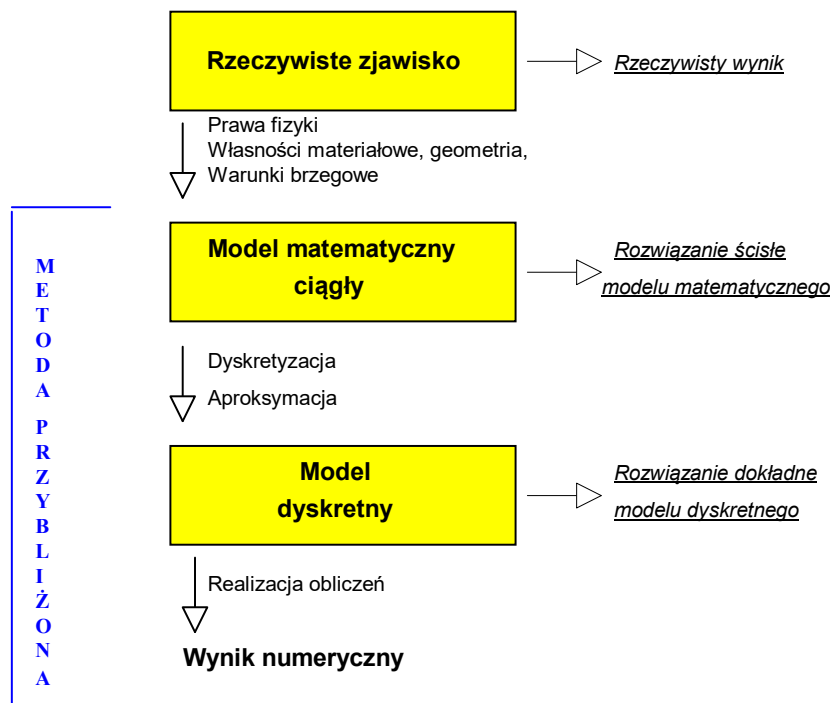


1. METODY PRZYBLIŻONE W MECHANICE KONSTRUKCJI

Konstrukcje odkształcalne mogą być badane doświadczalnie lub metodami teoretycznymi; analitycznymi i numerycznymi. Poważną wadą analiz eksperymentalnych jest ich koszt i czasochłonność. Dotyczy to zarówno większości badań modelowych jak i badań obiektów rzeczywistych. Pracochłonność metod doświadczalnych jest szczególnie odczuwana w trakcie prac projektowych, gdzie analizie poddawane są różne warianty konstrukcji. Dlatego rozwój metod teoretycznych, przede wszystkim metod numerycznych, wpływał zawsze na jakość projektowanych konstrukcji inżynierskich. Przykładem może być postęp w konstrukcjach statków, dźwigów, wysokich budynków, samochodów, samolotów.

Badania teoretyczne polegają na sformułowaniu odpowiedniego opisu matematycznego i następnie rozwiązaniu postawionego problemu. Niestety, dla bardzo wielu praktycznych problemów mechaniki konstrukcji można zbudować wiarygodny model matematyczny, ale nie są znane odpowiednie ściśle rozwiązania analityczne. Prostem przykładem takich zagadnień jest wyznaczanie współczynników koncentracji naprężeń. Tylko w bardzo szczególnych przypadkach znane są rozwiązania dokładne.

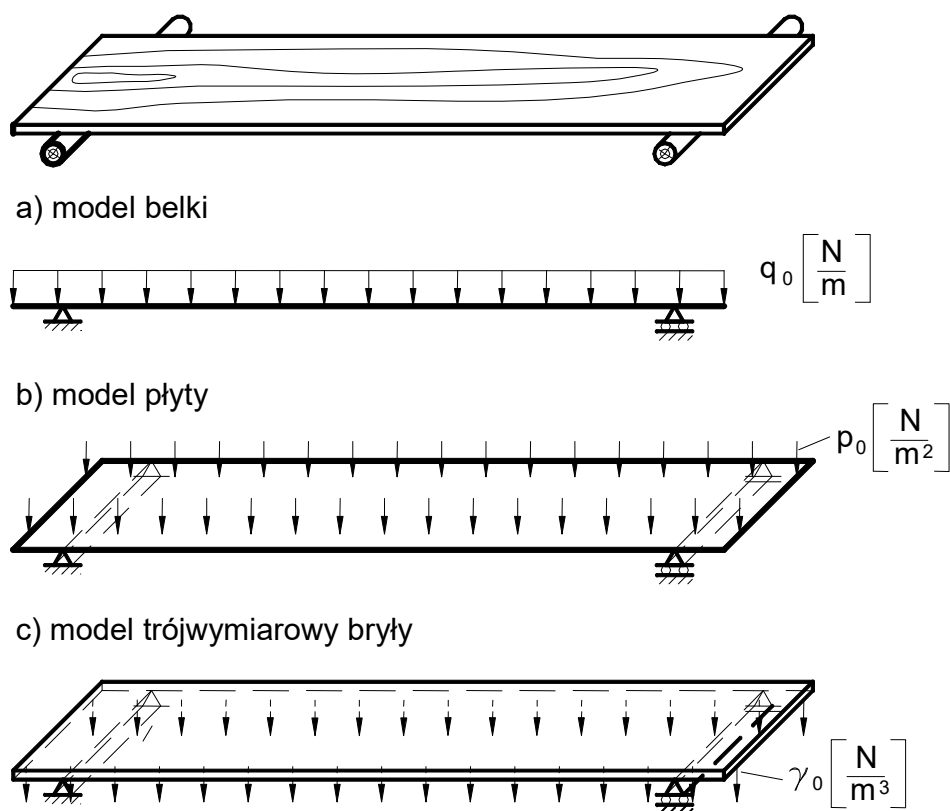


Rys. 1. Rozwiązywanie zagadnień analizy ośrodków ciągłych metodami przybliżonymi.
Schemat postępowania

Dlatego równoległe do rozwoju analitycznych metod znajdowania rozwiązań ścisłych były opracowywane i doskonalone metody przybliżone. Większość zadań analizy wytrzymałościowej konstrukcji rozwiązuje się współcześnie za pomocą metod przybliżonych, przy wykorzystaniu obliczeń komputerowych.

Ogólny schemat postępowania przy zastosowaniu metod przybliżonych przedstawiony jest na rysunku 1.

Pierwszym krokiem na drodze poszukiwania rozwiązania jest budowa modelu matematycznego. Potrzebna jest do tego znajomość odpowiednich praw fizyki, sformalizowany opis własności materiałowych, kształtu konstrukcji, jej warunków podparcia i obciążenia. Dla każdego rzeczywistego problemu możemy zbudować wiele różnych modeli matematycznych. Bardzo prostą ilustracją może być tu zadanie określenia ugięcia pod wpływem sił ciężkości swobodnie podpartej drewnianej deski (rys. 2).



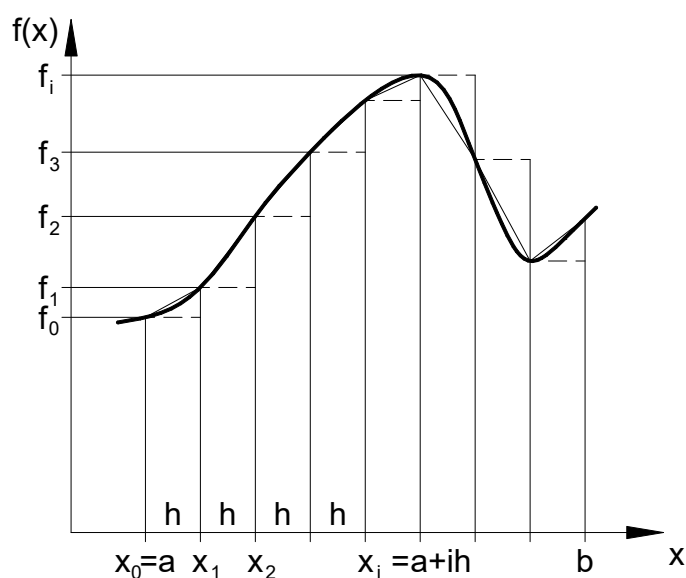
Rys. 2. Różne modele w analizie wytrzymałościowej zginanej deski

Dla takiego zagadnienia można przedstawić typowy jednowymiarowy model matematyczny belki, dwuwymiarowy model zginanej płyty lub pełny model trójwymiarowego zadania mechaniki ciał odkształcalnych. Własności materiału i równania opisujące konstrukcję

mogą w najprostszym przypadku zakładać izotropową liniową sprężystość. Mogą również uwzględniać anizotropię, lepkosprężystość czy duże ugięcia i w konsekwencji nieliniowość zjawisk. Również warunki brzegowe można przyjąć w postaci uproszczonej lub uwzględnić na przykład zjawiska kontaktowe. Przykład ten pokazuje, że zwykle nie ma jednego, najlepszego modelu obliczeniowego dla analizy wytrzymałości elementów konstrukcyjnych. Właściwy model obliczeniowy zależy od celu analizy, wymagań stawianych konstrukcji, żądanej dokładności wyników, dostępności danych materiałowych, ale także - w dużym stopniu - od dostępnych narzędzi obliczeniowych.

Ponadto opis matematyczny wybranego modelu można przedstawić w różnych sformułowaniach, na przykład równań różniczkowych, odpowiadających im równań całkowych lub w ujęciu wariacyjnym, w postaci problemu minimalizacji odpowiedniego funkcjonału [5]. Budowa modelu matematycznego stanowi najważniejszy element analizy obliczeniowej, w którym bardzo trudno zastąpić bezpośrednią decyzję człowieka przez sformalizowane algorytmy postępowania.

W metodach przybliżonych problem poszukiwania nieznanymi funkcji (opisujących pole przemieszczeń, odkształceń i naprężeń) zastępujemy przez problem poszukiwania skończonej liczby parametrów, za pomocą których można opisać – w pewnym przybliżeniu- poszukiwane funkcje.



Rys. 3. Dyskretyzacja i aproksymacja na przykładzie funkcji jednej zmiennej

Dokonujemy tego poprzez *dyskretyzację*, czyli wybór skończonej liczby parametrów opisujących w przybliżeniu analizowany problem oraz *aproksymację* poszukiwanych funkcji

za pomocą innych z góry założonych prostych funkcji, które uzależnione są od wybranych parametrów.

Najprostszym przykładem dyskretyzacji i aproksymacji jest numeryczna reprezentacja dowolnej funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$. Zrealizować możemy to przez podział przedziału $\langle a, b \rangle$ na n równych podprzedziałów o długości $h = (b-a)/n$.

Funkcję ciągłą $f(x)$ reprezentować będzie wtedy zbiór $(n+1)$ wartości $f(a+ih)$, $i=0,1,2, \dots, n$. Przybliżone wartości funkcji dla dowolnej wartości x z przedziału $\langle a, b \rangle$ wyznaczać możemy za pomocą aproksymacji funkcją w podprzedziałach stałą (schodkową), liniową (łamaną) lub na przykład wielomianowymi funkcjami sklejanymi (rys. 3).

Metody przybliżone analizy ośrodków ciągłych stanowią intensywnie rozwijaną część współczesnej matematyki. Wiążą się z problemami analizy funkcjonalnej, metod numerycznych i rachunku wariacyjnego. Prezentuje się je czasem jako szczególne warianty tak zwanych technik residuów ważonych dla przybliżonego rozwiązywania zagadnień opisywanych przez równania różniczkowe cząstkowe [5,7].

W naukach technicznych metody przybliżone opisywane są zazwyczaj od strony zastosowań, jako wyspecjalizowane procedury obliczeniowe dla określonych zagadnień, na przykład pól deformacji sprężystej, pól temperatury, pól elektrycznych i magnetycznych. Istnieje wiele metod przybliżonych, stosowanych od dawna w mechanice ciała odkształcalnego i mechanice konstrukcji, np. metoda Ritza, Galerkina, Trefftza, kollokacji, Kantorowicza [2,6]. Metody te różnią się postacią modelu matematycznego, sposobem dyskretyzacji i aproksymacji, a także stosowanym algorytmem obliczeń. Jednak współcześnie dominują te metody przybliżone, które charakteryzuje łatwość pełnej automatyzacji i które rozwinęły się wraz z rozwojem technik komputerowych. Najbardziej znane z nich to metoda różnic skończonych (MRS), metoda elementów skończonych (MES) i metoda elementów brzegowych (MEB). Nazywamy je metodami numerycznymi lub komputerowymi. Każda z tych metod ma bardzo bogatą literaturę i prezentowana może być w wielu odmiennych sformułowaniach.

Metoda różnic skończonych bezpośrednio wykorzystuje model matematyczny w postaci równań różniczkowych opisujących rozwiązywane zagadnienie [4,5]. Dyskretyzacja polega na ustaleniu w analizowanym obszarze siatki węzłów, np. w przypadku dwuwymiarowym prostokątnej lub trójkątnej. Przyjmujemy, że w każdym węźle pochodne można przybliżyć przez tak zwane ilorazy różnicowe, czyli wyrażenia algebraiczne uzależnione od wartości funkcji w węzłach przyległych. Równanie różniczkowe w każdym węźle zastępowane jest przez odpowiednie równanie algebraiczne wiążące wartości funkcji w najbliższych węzłach. W rezultacie otrzymujemy układ równań, których liczba odpowiada liczbie węzłów.

Niewiadomymi są wartości poszukiwanej funkcji w tych węzłach. Warunki brzegowe przedstawiane są jako dodatkowe związki łączące wartości funkcji w węzłach przylegających do konturu analizowanego obszaru.

W *metodzie elementów skończonych* [6,7] zamiast rozwiązywać równania różniczkowe poszukujemy przybliżonego rozwiązania sformułowania alternatywnego w postaci problemu minimalizacji odpowiedniego funkcjonału¹. Zagadnieniami minimalizacji funkcjonałów i ich związkami z odpowiednimi równaniami różniczkowymi zajmuje się dział matematyki nazywany rachunkiem wariacyjnym. W MES analizowany obszar dzielony jest na podobszary, nazywane elementami skończonymi. W przypadku dwuwymiarowym mogą to być np. trójkąty lub czworokąty. Elementy skończone łączą się ze sobą w węzłach. Położenie węzłów elementu wyznacza jego kształt. Przebieg poszukiwanej funkcji u wewnątrz każdego elementu wyznacza się za pomocą z góry ustalonych funkcji aproksymujących nazywanych funkcjami kształtu:

$$u(\bar{x}) = \sum_i N_i(\bar{x}) u_i$$

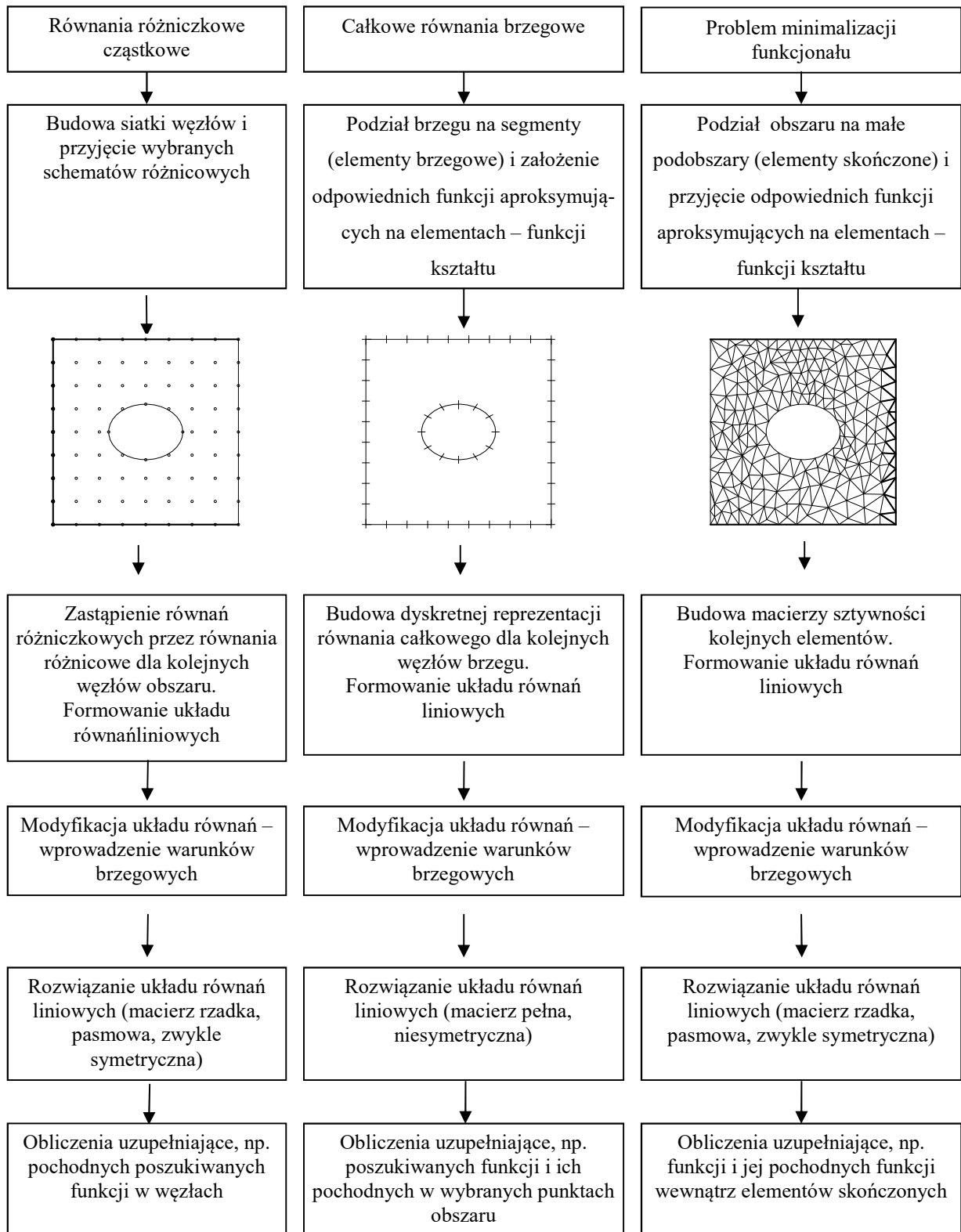
gdzie u_i stanowią wartości funkcji w węzłach, \bar{x} jest wektorem współrzędnych, a N_i są funkcjami kształtu.

Minimalizowany funkcjonał przedstawić wtedy można jako funkcję wielu zmiennych. Niewiadomymi są zwykle wartości poszukiwanej funkcji w węzłach całego obszaru. Warunek minimum prowadzi do układu równań liniowych, którego rozwiązanie określa nieznane wartości funkcji w węzłach.

Metoda elementów brzegowych [5] wymaga znajomości tak zwanych brzegowych równań całkowych, które w innej formie wyrażają związki znane w postaci równań różniczkowych lub w postaci problemu minimalizacji odpowiedniego funkcjonału. Dla wielu zagadnień tak zwane brzegowe sformułowanie, które wyraża całkowite zależności między wartościami funkcji i jej pochodnych dla punktów brzegowych jest znane z analizy matematycznej.

Dyskretyzacja polega na podziale brzegu na małe segmenty zwane elementami brzegowymi. W przypadku dwuwymiarowym mogą to być odcinki prostych lub też krzywych, których kształt opisany jest przez wielomiany. Zapisanie dyskretnego odpowiednika równania całkowego dla każdego węzła prowadzi do układu równań algebraicznych, z którego można wyznaczyć wartości poszukiwanej funkcji na brzegu.

¹ Metoda elementów skończonych może być prezentowana jako oparta na innych sformułowaniach]



Rys. 4. Ogólny schemat postępowania przy obliczeniach metodą różnic skończonych, metodą elementów brzegowych i metodą elementów skończonych

Rysunek 4 przedstawia ogólny szkic algorytmów MRS MEB i MES dla typowego problemu liniowego, na przykład dla zagadnienia Laplace'a, zagadnienia Poissona lub liniowego zadania teorii sprężystości.

Porównanie powyższych trzech metod jest w ogólnym przypadku bardzo trudne. Istnieją pewne szczególne zagadnienia, dla których za najbardziej efektywną można uznać metodę różnic skończonych lub metodę elementów brzegowych. Jednak niewątpliwie najbardziej uniwersalną jest metoda elementów skończonych. Fakt ten potwierdza powszechność zastosowań inżynierskich programów komputerowych MES.

Metoda elementów skończonych powstała w latach pięćdziesiątych XX wieku jako technika obliczeniowa stosowana praktycznie, bez formalnych podstaw teoretycznych. Podwaliny dało opracowanie metody analizy wytrzymałościowej poprzez podział złożonych konstrukcji nośnych na skończoną liczbę uproszczonych elementów składowych. Związki, które musiał spełniać tak zbudowany model zapisywano w postaci macierzowej. Otrzymywano układy równań z wieloma niewiadomymi, których liczba związana była z dokładnością przyjętego modelu.

Czynnikiem wpływającym na gwałtowny rozwój MES był postęp w technice komputerowej i potrzeby intensywnie rozwijanego wówczas przemysłu zbrojeniowego i lotniczego. Analiza podstaw teoretycznych metody, jej systematyzowanie i zwiększanie efektywności doprowadziło do korzystania z MES jako ogólnej metody obliczeń problemów ciągłych w matematyce, a także do szerokich zastosowań w praktyce inżynierskiej przy analizie pól naprężeń odkształceń i przemieszczeń, pól elektrycznych, magnetycznych, termicznych, zagadnień przepływowych a także pól sprzężonych (np. zagadnień naprężeń temperaturowych czy problemów elektryczno-ciepłych).

4. KONCEPCJA METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH NA PRZYKŁADZIE RÓWNIANIA POISSONA

MES opiera się na podziale analizowanego obszaru na typowe, małe podobszary nazywane elementami skończonymi. Wewnątrz każdego elementu skończonego poszukiwane funkcje przybliżane są za pomocą z góry założonych funkcji aproksymujących nazywanych funkcjami kształtu.

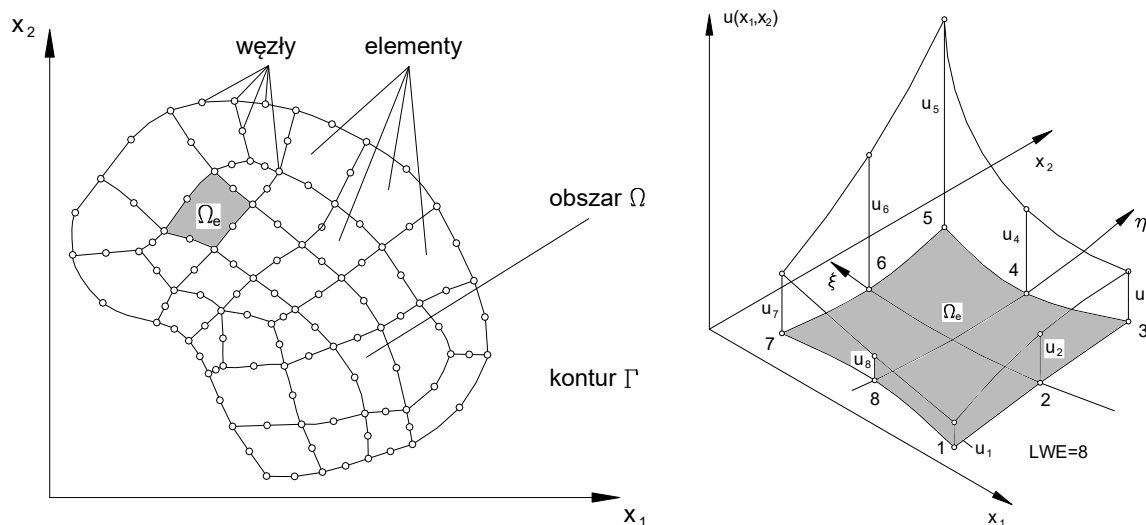
Koncepcję metody przeanalizujemy na przykładzie równania Poissona (33). Wykazać można, że rozwiązanie równania (33) z warunkami brzegowymi (34) jest równoważne rozwiązaniu zadania minimalizacji funkcjonału

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - 2f(x_1, x_2)u \right] d\Omega - \int_{\Gamma_q} q_0 u d\Gamma, \quad (81)$$

gdzie funkcja u spełnia warunek Dirchleta

$$u(\bar{x}) = u_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_u \quad (82)$$

W metodzie elementów skończonych dyskretyzacja prowadzi do zamiany zadania minimalizacji funkcjonału (81) na zadanie minimalizacji funkcji wielu zmiennych.



Rys. 20. Podział obszaru analizy Ω na elementy skończone i aproksymacja analizowanej funkcji wewnątrz elementu za pomocą wartości węzłowych.

W tym celu dzielimy obszar Ω na elementy Ω_i (rys. 20)

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{LE} \Omega_e \quad \text{i} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = 0 \quad \text{i} \neq j, \quad (83)$$

gdzie LE oznacza liczbę elementów skończonych w obszarze Ω .

Zakładamy, że wartość funkcji poszukiwanej $u(\bar{x})$ w dowolnym punkcie wewnętrznym każdego elementu możemy określić za pomocą jej wartości w węzłach tego elementu zgodnie z formułą

$$u(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{LWE} N_i(x_1, x_2) u_i \quad (84)$$

gdzie LWE oznacza liczbę węzłów elementu,

$u_i, i = 1, \dots, LWE$ są wartościami poszukiwanej funkcji w węzłach,

$N_i(x_1, x_2)$ są założonymi z góry funkcjami aproksymującymi, tak zwanymi funkcjami kształtu.

Elementy skończone łączą się ze sobą w węzłach, dzięki czemu zachowana może być ciągłość analizowanej funkcji na granicach między elementami. Funkcje kształtu N_i z reguły definiowane są w lokalnych układach współrzędnych, związanych z węzłami elementu, dzięki czemu ich postać jest uniezależniona od wielkości elementu i usytuowania jego węzłów.

Wartość funkcjonału po dyskretyzacji obszaru można przedstawić jako:

$$I(u) \cong \sum_{i=1}^{LE} \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - 2f(x_1, x_2)u \right] d\Omega_i - \sum_{j=1}^{LK} \int_{\Gamma_j} q_0 u d\Gamma_j \quad (85)$$

gdzie LK oznacza liczbę krawędzi elementów leżących na części Γ_q konturu, a funkcja u określona jest w każdym podobszarze Ω_i przez związek typu (84).

Wewnątrz każdego elementu, zgodnie z (84) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \sum_{i=1}^{LWE} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} u_i, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \sum_{i=1}^{LWE} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} u_i. \end{aligned} \quad (86)$$

Po podstawieniu (86) do (85) i po przeprowadzeniu całkowania $I(u)$ staje się funkcją wartości węzłowych $u_i, i = 1, 2, \dots, LW$, gdzie LW oznacza liczbę węzłów podzielonego obszaru.

Jeśli funkcję tę przedstawimy w postaci macierzowej otrzymamy:

$$I(u) \approx \frac{1}{2} \left[u_1, u_2, u_3, \dots, u_{LW} \right] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1LW} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & & \\ k_{31} & k_{32} & & & \\ \dots & & & & \\ k_{LW1} & & & & k_{LW LW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_{LW} \end{Bmatrix} - \left[u_1, u_2, u_3, \dots, u_{LW} \right] \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_{LW} \end{Bmatrix}$$

Związek ten można zapisać w skróconej formie:

$$I \approx \frac{1}{2} \left[\underset{1 \times LW}{u} \right] \left[\underset{LW \times LW}{K} \right] \left\{ \underset{LW \times 1}{u} \right\} - \left[\underset{1 \times LW}{u} \right] \left\{ \underset{LW \times 1}{b} \right\}. \quad (87)$$

Indeksy na dole poszczególnych symboli oznaczają wymiary wektorów i macierzy.

Warunkiem koniecznym minimum tej funkcji jest zerowanie się jej wszystkich pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, LW. \quad (88)$$

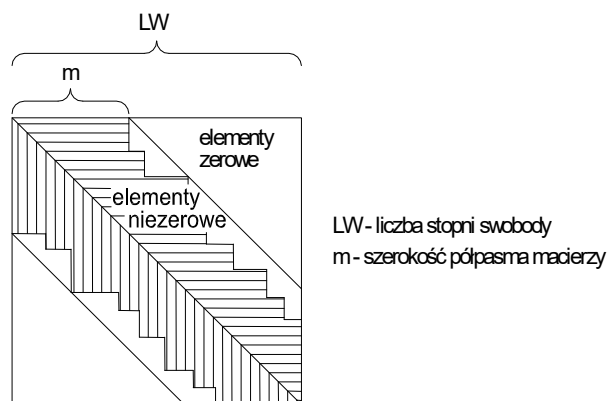
Otrzymamy stąd

$$[K]\{u\} = \{b\}, \quad (89)$$

czyli układ liniowych z nieznanym wektorem wartości węzłowych funkcji u . Przed rozwiązaniem tego układu należy uwzględnić jeszcze znane z brzegowego warunku Dirchleta niektóre wartości u_i .

Po rozwiązaniu układu otrzymujemy wszystkie wartości węzłowe u_i . Możemy wtedy wyznaczyć przybliżone wartości funkcji u i jej pochodnych wewnątrz każdego elementu korzystając ponownie ze związków (84) i (86).

Macierz $[K]$ jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną, pasmową (rys. 21).



Rys. 21. Symetryczna macierz układu równań MES

Szerokość półpasma m macierzy $[K]$ zależy od przyjętej w wektorze $\{u\}$ numeracji węzłów obszaru. Zwykle możemy tak zmienić numerację aby uzyskać $m \ll LW$.

5. MES W ANALIZIE KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH

Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji przedstawiana zwykle jest jako metoda przybliżona wykorzystująca twierdzenie o minimum całkowitej energii potencjalnej układu odkształcalnego.

Całkowita energia potencjalna (V) jest różnicą energii potencjalnej odkształcenia sprężystego (U) i energii potencjalnej obciążeń zewnętrznych ($-W_z$), gdzie W_z nazywane jest pracą obciążeń zewnętrznych

$$V = U - W_z = \min!, \quad (90)$$

Całkowita energia potencjalna jest funkcjonalem, którego argumentem jest funkcja opisująca przemieszczenia ciała odkształcalnego. Pod wpływem obciążenia w ciele powstaje takie pole przemieszczeń, dla którego V przyjmuje wartość minimalną. Wówczas układ odkształcalny pozostaje w stanie równowagi.

Funkcje opisujące pole przemieszczeń muszą dodatkowo spełniać przemieszczeniowe warunki brzegowe. Wówczas warunek minimum całkowitej energii potencjalnej jest warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi sprężystego ustroju odkształcalnego poddanego obciążeniu zewnętrznemu.

Prezentację metody elementów skończonych zaczniemy od konstrukcji belkowych, należących do najprostszych prętowych elementów konstrukcyjnych.

5.1. BELKI

W przypadku belek obciążonych obciążeniem ciągłym $p \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ całkowitą energię potencjalną określa wzór:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI(w'')^2 dx - \int_0^l p w dx, \quad (91)$$

gdzie $w(x)$ jest funkcją ugięcia belki o długości l .

W przypadku występowania dodatkowych obciążeń skupionych w postaci sił P_i i momentów sił M_i wzór (91) przyjmie postać

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI(w'')^2 dx - \int_0^l p w dx - \sum_i P_i w_i - \sum_j M_j \theta_j \quad (92)$$

gdzie w_i i θ_j oznaczają odpowiednio przemieszczenie w punkcie przyłożenia siły P_i i kąt ugięcia w punkcie przyłożenia momentu siły M_j .

Metoda elementów skończonych jest przybliżoną metodą znajdowania minimum funkcjonału V i ma wiele wspólnego ze znaną od dawna metodą Ritza.

Przypomnijmy najpierw schemat postępowania w metodzie Ritza:

1. Linię ugięcia opisujemy za pomocą rozwiązania przybliżonego

$$\tilde{w}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \quad (93)$$

gdzie a_i są nieznanymi parametrami, a φ_i są z góry założonymi funkcjami.

Funkcje φ_i muszą być liniowo niezależne, to znaczy żadna z nich nie może być kombinacją liniową pozostałych a $\tilde{w}(x)$ spełniać powinna przemieszczeniowe warunki brzegowe (dotyczą one poszukiwanej funkcji przemieszczeń i jej pochodnych do rzędu o 1 mniejszego niż największy rząd pochodnej funkcji poszukiwanej w minimalizowanym funkcjonale)

2. Podstawiamy $\tilde{w}(x)$ do funkcjonału całkowitej energii potencjalnej (92). Otrzymujemy energię potencjalną jako funkcję nieznanymi parametrów a_1, a_2, \dots, a_n .
3. Warunek minimum funkcjonału zastępujemy przez warunek minimum funkcji wielu zmiennych

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (94)$$

Ponieważ V jest funkcją kwadratową, dodatnio określoną, to warunek (94) jest wystarczający dla wyznaczenia minimum.

Warunek minimum (94) stanowi układ n równań liniowych z niewiadomymi a_1, a_2, \dots, a_n .

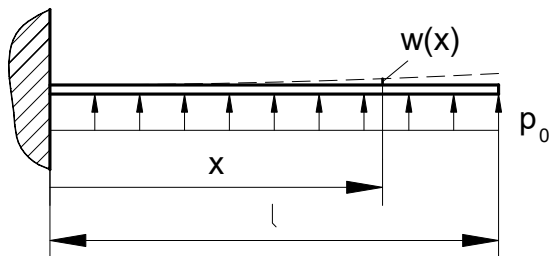
4. W wyniku rozwiązania układu (94) otrzymujemy wartości parametrów a_i , które jednocześnie określają otrzymane rozwiązanie przybliżone (93).

Stąd łatwo wyznaczyć przebieg momentu gnącego i siły tnącej

$$\begin{aligned} \tilde{M}_q(x) &= EI\tilde{w}''(x), \\ \tilde{T}(x) &= -EI\tilde{w}'''(x). \end{aligned} \quad (95)$$

PRZYKŁAD 5.

Porównać rozwiązanie ścisłe dla belki wspornikowej (rys. 22) o długości l obciążonej stałym rozkładem sił $p_0 \left[\frac{N}{m} \right]$ z rozwiązaniem metodą Ritzza zakładając, że $\tilde{w}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$.

Rys. 22. Belka wspornikowa obciążona obciążeniem ciągłym p_0 [N/m] (przykład 5)

Rozwiązanie

Rozwiązanie ścisłe, otrzymane na przykład z całkowania równania różniczkowego $w''(x) = \frac{M_g(x)}{EI}$ ma postać:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{p_0}{24EI} (6l^2 - 4lx + x^2)x^2, \\ M_q(x) &= \frac{p_0}{2} (l-x)^2, \\ T(x) &= -p_0(l-x). \end{aligned} \quad (96)$$

Funkcja przybliżona \tilde{w} powinna spełniać warunki brzegowe:

$$\tilde{w}(x=0) = 0, \quad \tilde{w}'(x=0) = 0. \quad (97)$$

Stąd otrzymamy

$$\tilde{w}(x) = a_3x^2 + a_4x^3. \quad (98)$$

Całkowita energia potencjalna V , zgodnie ze wzorem (92) jest równa:

$$V = \frac{EI}{2} (4a_3^2l + 12a_3a_4l^2 + 12a_4^2l^3) - p_0 \left(a_3 \frac{l^3}{3} + a_4 \frac{l^4}{4} \right). \quad (99)$$

Warunek minimum przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a_3} &= \frac{EI}{2} (8la_3 + 12l^2a_4) - \frac{p_0l^3}{3} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial a_4} &= \frac{EI}{2} (12l^2a_3 + 24l^3a_4) - \frac{p_0l^4}{4} = 0. \end{aligned} \quad (100)$$

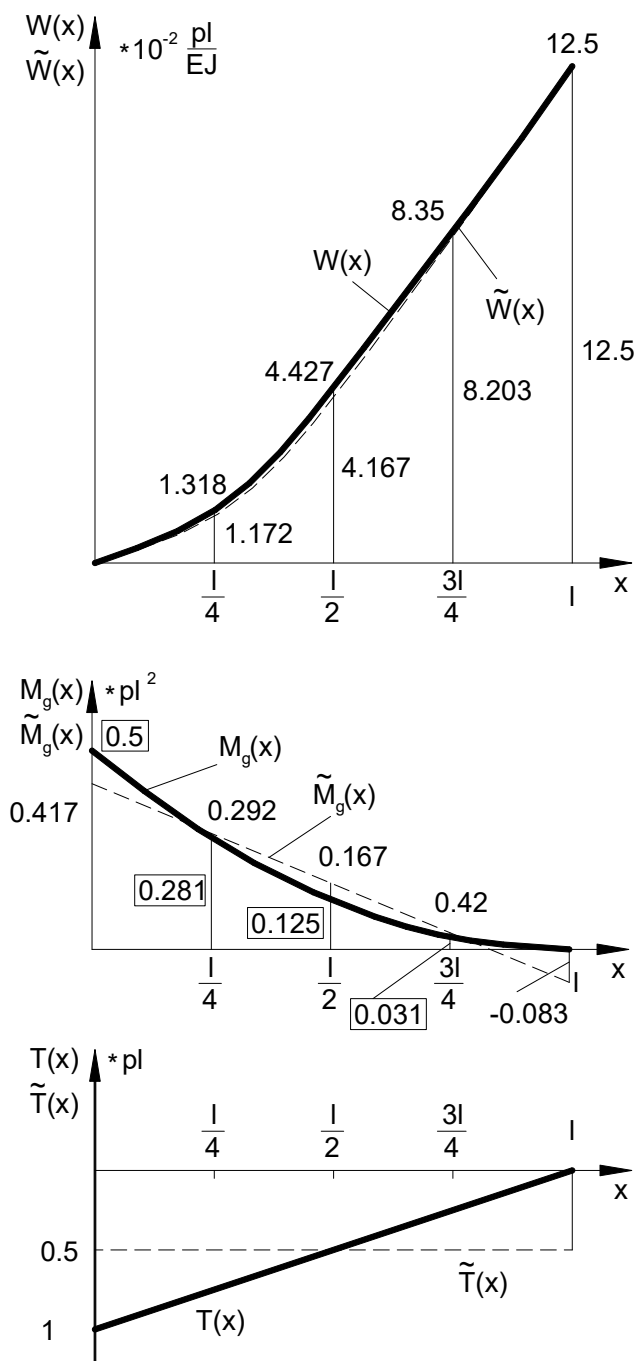
Stąd

$$a_3 = \frac{5}{24} \frac{p_0l^2}{EI}, \quad a_4 = -\frac{p_0l}{12EI} \quad (101)$$

Rozwiązaniem przybliżonym jest więc

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x) &= \frac{5}{24} \frac{p_0l^2}{EI} x^2 - \frac{p_0}{12EI} x^3, \\ \tilde{M}_q(x) &= \frac{5}{12} p_0l^2 - \frac{p_0l}{2} x, \\ \tilde{T}(x) &= \frac{-p_0l}{2}. \end{aligned} \quad (102)$$

Porównanie rozwiązania ścisłego i przybliżonego przedstawione jest na rys. (23).



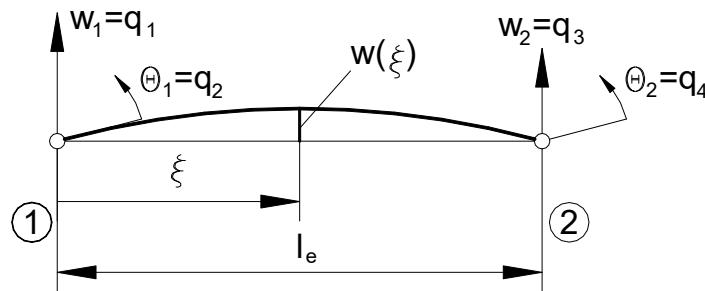
Rys. 23. Rozwiązanie ścisłe i przybliżone dla zadania belki wspornikowej (przykład 5)

Wykresy na rys. 23 wskazują, że rozwiązanie przybliżone \tilde{w} jest bardzo bliskie rozwiązaniu ścisłemu $w(x)$. Dokładność rozwiązania przybliżonego jest gorsza, gdy porównamy $M_g(x)$ i $\tilde{M}_g(x)$, a zupełnie niezadowolająca w przypadku porównania rozkładu sił tnących $T(x)$ i $\tilde{T}(x)$. Taka cecha rozwiązania przybliżonego jest charakterystyczna dla wielu metod przybliżonych, także dla MES. Kolejne pochodne funkcji aproksymującej są w metodach przybliżonych coraz bardziej odległe od odpowiednich pochodnych w rozwiązaniu ścisłym.

Rozwiązanie metodą elementów skończonych przebiega w sposób podobny do przyjętego w metodzie Ritza. Zasadnicza różnica polega na innej koncepcji doboru funkcji aproksymujących. W metodzie Ritza mamy

do czynienia z aproksymacją globalną, parametryczną. Funkcje aproksymujące są określone w całym obszarze a ich przebieg uzależniony jest od wartości parametrów występujących we wzorach definiujących. W rezultacie zmiana dowolnego parametru prowadzi do zmiany przebiegu poszukiwanej funkcji w całym obszarze.

W metodzie elementów skończonych stosuje się aproksymację lokalną, węzłową. Oznacza to, że funkcje aproksymujące definiowane są lokalnie w elementach skończonych, a ich przebieg określany jest przez wartość funkcji w węzłach siatki podziału. W efekcie zmiana jednego parametru (wartości funkcji w jednym węźle) zmienia rozwiązanie tylko w bezpośrednim otoczeniu tego węzła. Postępowanie jest zbliżone do przyjmowanego w grafice komputerowej i programach CAD przy aproksymacji kształtu za pomocą funkcji sklepanych.



Rys. 24. Element skończony belki

Typowy element skończony belki (rys. 24) stanowi segment o długości l_e , w którym założona postać funkcji ugięcia wyraża się wzorem

$$w(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3 \quad (103)$$

Taki wielomian jest określony przez cztery parametry α_i . W MES dążymy jednak do tego, aby funkcja ugięcia była definiowana przez przemieszczenia węzłowe. Przyjmijmy, że cztery niezależne przemieszczenia węzłowe: w_1 i w_2 czyli przemieszczenia węzłów oraz θ_1 i θ_2 czyli kąty obrotu w węzłach tworzą wektor (macierz-kolumnę):

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \quad (104)$$

Wektor $\{q\}_e$ nazywamy wektorem przemieszczeń węzłowych elementu skończonego lub też wektorem stopni swobody elementu. Ugięcia $w(\xi)$ przedstawimy jako uzależnione od przemieszczeń węzłowych q_i wg formuły

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi) q_i. \quad (105)$$

Potrzebne jest więc wyznaczenie związków między stopniami swobody $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ funkcji $w(\xi)$ (103) a nowymi stopniami swobody q_1, q_2, q_3, q_4 (105).

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}
q_1 &= w(0) = \alpha_1, \\
q_2 &= \frac{dw}{d\xi}(0) = \alpha_2, \\
q_3 &= w(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l_e + \alpha_3 l_e^2 + \alpha_4 l_e^3, \\
q_4 &= \frac{dw}{d\xi}(l) = \alpha_2 + 2\alpha_3 l_e + 3\alpha_4 l_e^2.
\end{aligned} \tag{106}$$

Równania (106) możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l_e & l_e^2 & l_e^3 \\ 0 & 1 & 2l_e & 3l_e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}. \tag{107}$$

Stąd wyznaczyć można zależność odwrotną

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l_e^2} & \frac{-2}{l_e} & \frac{3}{l_e^2} & \frac{-1}{l_e} \\ \frac{2}{l_e^3} & \frac{1}{l_e} & \frac{-2}{l_e^3} & \frac{1}{l_e^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e. \tag{108}$$

Podstawiając (108) do (103) otrzymamy

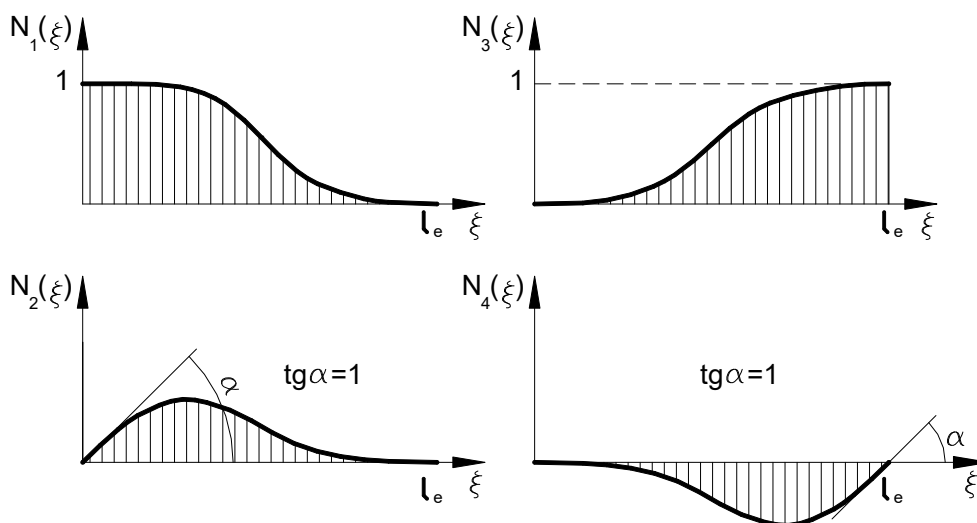
$$w(\xi) = \begin{bmatrix} 1, \xi, \xi^2, \xi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi), N_4(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}, \tag{109}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
N_1(\xi) &= 1 - 3\frac{\xi^2}{l_e^2} + 2\frac{\xi^3}{l_e^3}, \\
N_2(\xi) &= \xi - 2\frac{\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2}, \\
N_3(\xi) &= 3\frac{\xi^2}{l_e^2} - 2\frac{\xi^3}{l_e^3}, \\
N_4(\xi) &= \frac{-\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2}.
\end{aligned} \tag{110}$$

Funkcje $N_i(\xi)$ nazywamy funkcjami kształtu elementu belkowego. Są one oczywiście, tak jak założona wstępnie funkcja ugięcia (103), wielomianami trzeciego stopnia. Ze związku (109) wynika, że każda z funkcji $N_i(\xi)$

opisuje linie ugięcia elementu belki, w którym przemieszczenia węzłowe są: $q_i = 1$, a dla $j \neq i$ $q_j = 0$ (rys. 25).



Rys. 25. Funkcje kształtu elementu belki

Znając funkcję ugięcia (109) możemy wyznaczyć rozkłady pochodnych linii ugięcia $w(\xi)$ jako funkcję położenia i przemieszczeń węzłowych. Mamy więc

$$\begin{aligned} w(\xi) &= [N(\xi)] \{q\}_e, \\ w'(\xi) &= [N'(\xi)] \{q\}_e, \\ w''(\xi) &= [N''(\xi)] \{q\}_e. \end{aligned} \quad (111)$$

Także całkowitą energię potencjalną elementu belki można przedstawić jako uzależnioną od przemieszczeń węzłowych. Całkowita energia potencjalna elementu belki o długości l_e obciążonego obciążeniem ciągłym $p(\xi)$ jest zgodnie z (92) określona wzorem:

$$V_e = U_e - W_{ze} = \frac{EI}{2} \int_0^{l_e} (w''(\xi))^2 d\xi - \int_0^{l_e} p(\xi)w(\xi)d\xi - \sum_i P_i w_i - \sum_j M_j \vartheta_j. \quad (112)$$

Wykorzystując (111) możemy po kolejnych przekształceniach uzyskać wyrażenie na energię sprężystą U_e w formie macierzowej:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{EI}{2} \int_0^{l_e} w''(\xi)w''(\xi)d\xi = \frac{EI}{2} \int_0^{l_e} [q]_e \{N''\} [N''] \{q\}_e d\xi = \\ &= \frac{EI}{2} [q]_e \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} N_1'' N_1'' & N_1'' N_2'' & N_1'' N_3'' & N_1'' N_4'' \\ N_2'' N_1'' & N_2'' N_2'' & N_2'' N_3'' & N_2'' N_4'' \\ N_3'' N_1'' & N_3'' N_2'' & N_3'' N_3'' & N_3'' N_4'' \\ N_4'' N_1'' & N_4'' N_2'' & N_4'' N_3'' & N_4'' N_4'' \end{bmatrix} d\xi \{q\}_e. \end{aligned}$$

Wynik możemy zapisać w postaci

$$U_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e, \quad (113)$$

gdzie

$$[k]_e = EI \begin{bmatrix} \int_0^{l_e} N_1'' N_1'' d\xi & \int_0^{l_e} N_1'' N_2'' d\xi & \int_0^{l_e} N_1'' N_3'' d\xi & \int_0^{l_e} N_1'' N_4'' d\xi \\ \int_0^{l_e} N_2'' N_1'' d\xi & \int_0^{l_e} N_2'' N_2'' d\xi & \int_0^{l_e} N_2'' N_3'' d\xi & \int_0^{l_e} N_2'' N_4'' d\xi \\ \int_0^{l_e} N_3'' N_1'' d\xi & \int_0^{l_e} N_3'' N_2'' d\xi & \int_0^{l_e} N_3'' N_3'' d\xi & \int_0^{l_e} N_3'' N_4'' d\xi \\ \int_0^{l_e} N_4'' N_1'' d\xi & \int_0^{l_e} N_4'' N_2'' d\xi & \int_0^{l_e} N_4'' N_3'' d\xi & \int_0^{l_e} N_4'' N_4'' d\xi \end{bmatrix}. \quad (114)$$

Macierz $[k]_e$ w wyrażeniu (113) nazywamy macierzą sztywności elementu skończonego belki. Po podstawieniu do wzoru (114) drugich pochodnych funkcji $N_i(\xi)$ i obliczeniu wartości całek otrzymamy:

$$[k]_e = \frac{2EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e \\ 3l_e & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 \\ -6 & -3l_e & 6 & -3l_e \\ 3l_e & l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix}. \quad (115)$$

Podobnie przekształcamy pracę obciążenia ciągłego działającego na element skończony:

$$\begin{aligned} W_{ze}^p &= \int_0^{l_e} p(\xi) w(\xi) d\xi = \int_0^{l_e} p(\xi) [N(\xi)] \{q\}_e d\xi = \\ &= \int_0^{l_e} [N_1(\xi) p(\xi) d\xi, N_2(\xi) p(\xi) d\xi, N_3(\xi) p(\xi) d\xi, N_4(\xi) p(\xi) d\xi] \{q\}_e d\xi, \end{aligned}$$

$$W_{ze}^p = [F_1^e, F_2^e, F_3^e, F_4^e]_e \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = [F]_e \{q\}_e, \quad (116)$$

$$F_i^e = \int_0^{l_e} N_i(\xi) p(\xi) d\xi. \quad (117)$$

Wzór (116) wskazuje, że wartości F_i^e możemy traktować jako wartości uogólnionych sił węzłowych równoważnych obciążeniu ciągłemu $p(\xi)$ działającemu na analizowany element skończony. Elementy F_1^e i F_3^e wektora $\{F\}_e$ są siłami skupionymi działającymi w węzłach elementu a F_2^e i F_4^e są wartościami momentów sił działających w tych węzłach.

PRZYKŁAD 6.

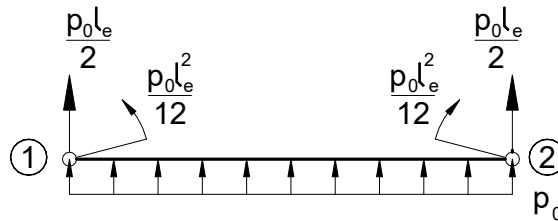
Znaleźć wartości równoważnych sił węzłowych odpowiadających obciążeniu ciągłemu o stałej wartości $p(\xi) = p_0$.

Rozwiązanie

Obliczając wartości kolejnych całek (117) otrzymamy:

$$\begin{aligned} F_1^e &= F_3^e = \frac{p_0 l_e}{2} \\ F_2^e &= \frac{p_0 l_e^2}{12} \\ F_4^e &= \frac{-p_0 l_e^2}{12} \end{aligned} \quad (118)$$

Interpretację geometryczną otrzymanego wyniku przedstawia rysunek 26.



Rys. 26. Siły węzłowe w elemencie belki równoważne obciążeniu ciągłemu p_0

Związki (113) i (116) pozwalają napisać wyrażenie na całkowitą energię potencjalną elementu skończonego belki w postaci

$$V_e = U_e - W_{ze} = \frac{1}{2} \underset{1 \times 4}{[q]}_e \underset{4 \times 4}{[k]}_e \underset{4 \times 1}{\{q\}}_e - \underset{1 \times 4}{[q]}_e \underset{4 \times 1}{\{F\}}_e. \quad (119)$$

Indeksy na dole oznaczają wymiary poszczególnych wektorów i macierzy.

Jeżeli belka została podzielona na LE elementów skończonych i LW węzłów, to jej ugięcie opisane jest przez $n = 2LW$ stopni swobody, tworzących tak zwany globalny wektor stopni swobody modelu belki:

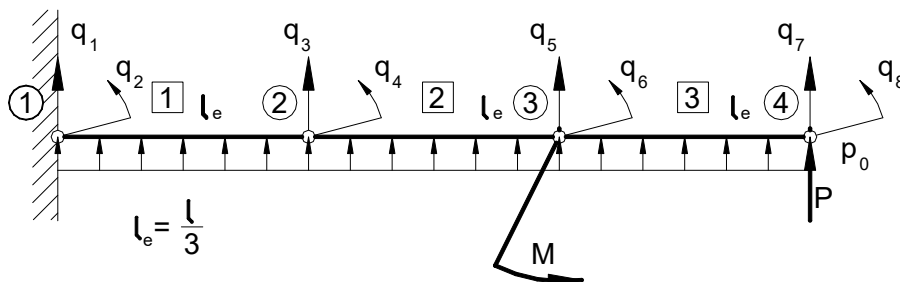
$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{Bmatrix}.$$

Każdemu elementowi belki odpowiadają cztery spośród stopni swobody q_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Energia sprężysta elementu skończonego U_e może być więc zapisana w postaci

$$U_e = \frac{1}{2} \underset{1 \times n}{[q]}_e \underset{n \times n}{[k^*]}_e \underset{n \times 1}{\{q\}}_e, \quad (120)$$

gdzie rozszerzona macierz sztywności elementu o wymiarze $n \times n$ $[k^*]_e$ ma, tak jak macierz (115), tylko 16 niezerowych elementów. Ich miejsca w macierzy uzależnione są od pozycji jaką mają kolejne stopnie swobody elementu w globalnym wektorze stopni swobody $\{q\}$.



Rys. 27. Model utwierdzonej jednostronnie belki obciążonej siłami skupionymi P, M oraz obciążeniem ciągłym p_0

PRZYKŁAD 7

Model belki przedstawionej na rysunku 27 składa się z trzech elementów skończonych i czterech węzłów. Globalny wektor stopni swobody ma więc 8 elementów:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ w_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}.$$

Stopniami swobody elementu pierwszego są q_1, q_2, q_3, q_4 elementu drugiego: q_3, q_4, q_5, q_6 a elementu trzeciego q_5, q_6, q_7, q_8 . Kolejne macierze $[k^*]_i$ mają więc postać:

$$[k^*]_1 = \begin{matrix} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{shaded} & & & & & & & \\ \hline \text{shaded} & & & & & & & \\ \hline \text{shaded} & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline \end{array} & [k^*]_2 = \begin{matrix} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & \text{shaded} & & & & & \\ \hline & & \text{shaded} & & & & & \\ \hline & & \text{shaded} & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline \end{array} & [k^*]_3 = \begin{matrix} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline \end{array} & \end{matrix}$$

gdzie niezerowe elementy macierzy wypełniają jedynie obszar przyciemniony i określone są przez wzór (115).

Przedstawienie U_e w postaci (120) daje możliwość łatwego zsumowania energii dla całej analizowanej konstrukcji

$$U = \sum_{e=1}^{LE} U_e = \frac{1}{2} [q] \left(\sum_{i=1}^{LE} [k^*]_e \right) \{q\} = \frac{1}{2} [q] [K] \{q\}. \quad (121)$$

Współczynniki macierzy $[K]$ stanowią, zgodnie z regułami dodawania macierzy, sumy odpowiednich współczynników macierzy $[k^*]_e$.

W rezultacie całkowita energia potencjalna całej konstrukcji może być zapisana jako:

$$V = U - W_z = \frac{1}{2} [q] [K] \{q\} - [q] \{F\}, \quad (122)$$

gdzie $\{F\}$ oznacza wektor sił węzłowych modelu. Wyliczając elementy wektora $\{F\}$ uwzględniamy równoważne siły węzłowe od obciążenia ciągłego oraz istniejące siły skupione. W ten sposób otrzymaliśmy całkowitą energię potencjalną belki jako funkcję nieznanymi przemieszczeń węzłowych $\{q\}$. Ponieważ jest to kwadratowa, dodatnio określona funkcja wielu zmiennych więc twierdzenie o minimum całkowitej energii potencjalnej prowadzi do warunku:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Dokonując różniczkowania wyrażenia (122) otrzymamy układ równań liniowych

$$[K] \{q\} = \{F\}. \quad (123)$$

Przed rozwiązaniem (123) należy uwzględnić przemieszczeniowe warunki brzegowe, czyli warunki podparcia konstrukcji. Warunki te oznaczają narzucenie wartości niektórych elementów wektora $\{q\}$. Macierz $[K]$ układu równań przed uwzględnieniem warunków podparcia jest, podobnie jak każda z macierzy sztywności elementów, macierzą osobliwą. Jest to odzwierciedleniem faktu, że bez narzucenia przynajmniej takich warunków podparcia, które uniemożliwiają ruch modelu konstrukcji jako bryły sztywnej, rozwiązanie w postaci przemieszczeń byłoby niejednoznaczne. Uwzględnienie warunków podparcia prowadzi do modyfikacji układu równań. Po rozwiązaniu przekształconego układu (123) otrzymujemy wartości wszystkich przemieszczeń węzłowych $\{q\}$. W końcowej fazie obliczeń możemy wyznaczyć rozkłady sił wewnętrznych w każdym elemencie skończonym.

$$M_q(\xi) = EI w''(\xi) = EI \left[N_1'', N_2'', N_3'', N_4'' \right] \left\{ \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{matrix} \right\}_e, \quad (124)$$

$$T(\xi) = -EI w'''(\xi) = EI \left[N_1''', N_2''', N_3''', N_4''' \right] \left\{ \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{matrix} \right\}_e.$$

Po wyznaczeniu kolejnych pochodnych funkcji kształtu $N_i(\xi)$ określonych przez wzory (110) otrzymamy

$$M_q(\xi) = \left[\frac{12}{l_e^3} \left(\xi - \frac{l_e}{2} \right) q_1 + \frac{6}{l_e^3} \left(\xi - \frac{2}{3} l_e \right) q_2 - \frac{12}{l_e^3} \left(\xi - \frac{l_e}{2} \right) q_3 + \frac{6}{l_e^2} \left(\xi - \frac{l_e}{3} \right) q_4 \right] EI,$$

$$T(\xi) = - \left[\frac{12}{l_e^3} (q_1 - q_3) + \frac{6}{l_e^2} (q_2 + q_4) \right] EI.$$
(125)

Ze wzorów (125) wynika, że przy założonych funkcjach kształtu $M_q(\xi)$ jest zawsze funkcją liniową na prezentowanym elemencie skończonym belki a $T(\xi)$ jest funkcją stałą.

PRZYKŁAD 8

Model belki przedstawiony w przykładzie 7 i na rysunku (27) prowadzi do układu równań

k_{11}^1	k_{12}^1	k_{13}^1	k_{14}^1	0	0	0	0
k_{21}^1	k_{22}^1	k_{23}^1	k_{24}^1	0	0	0	0
k_{31}^1	k_{32}^1	$k_{33}^1 + k_{11}^2$	$k_{34}^1 + k_{12}^2$	k_{13}^2	k_{14}^2	0	0
k_{41}^1	k_{42}^1	$k_{43}^1 + k_{21}^2$	$k_{44}^1 + k_{22}^2$	k_{23}^2	k_{24}^2	0	0
0	0	k_{31}^2	k_{32}^2	$k_{33}^2 + k_{11}^3$	$k_{34}^2 + k_{12}^3$	k_{13}^3	k_{14}^3
0	0	k_{41}^2	k_{42}^2	$k_{43}^2 + k_{21}^3$	$k_{44}^2 + k_{22}^3$	k_{23}^3	k_{24}^3
0	0	0	0	k_{31}^3	k_{32}^3	k_{33}^3	k_{34}^3
0	0	0	0	k_{41}^3	k_{42}^3	k_{43}^3	k_{44}^3

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix}$$

gdzie k_{ij}^e oznacza współczynnik (i, j) macierzy elementu skończonego o numerze e .

Uwzględniając podane warunki podparcia i obciążenia oraz podstawiając wartości współczynnika k_{ij}^e mamy:

6	$3l_e$	-6	$3l_e$	0	0	0	0
$3l_e$	$2l_e^2$	$-3l_e$	l_e^2	0	0	0	0
-6	$-3l_e$	12	0	-6	$3l_e$	0	0
$3l_e$	l_e^2	0	$4l_e^2$	$-3l_e$	l_e^2	0	0
0	0	-6	$-3l_e$	12	0	-6	$3l_e$
0	0	$3l_e$	l_e^2	0	$4l_e^2$	$-3l_e$	l_e^2
0	0	0	0	-6	$-3l_e$	6	$-3l_e$
0	0	0	0	$3l_e$	l_e^2	$-3l_e$	$2l_e^2$

$$\frac{2EI}{l_e^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ p_0 l_e \\ 0 \\ p_0 l_e \\ M \\ P + \frac{p_0 l_e}{2} \\ -\frac{p_0 l_e^2}{12} \end{pmatrix}$$

Do układu równań wprowadziliśmy jako znane $q_1 = 0$ i $q_2 = 0$ (warunki utwierdzenia węzła pierwszego). Nieznane są natomiast wartości F_1 i F_2 , ponieważ nieznane są wartości reakcji.

PRZYKŁAD 9

Jeśli model belki z rysunku 22 składać się będzie tylko z jednego elementu skończonego otrzymamy układ równań:

$$\frac{2EI}{l^3} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 3l & -6 & 3l \\ \hline 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ \hline -6 & -3l & 6 & -3l \\ \hline 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \\ \hline \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \frac{p_0 l}{2} \\ -\frac{p_0 l^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Rozwiązanie możemy otrzymać przekształcając powyższy układ równań do postaci

$$[A] \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \{b\},$$

lub, co prostsze, redukując go do dwóch ostatnich równań (po przyjęciu $q_1 = 0$ i $q_2 = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{2EI}{l^3} (6q_3 - 3lq_4) &= \frac{p_0 l}{2}, \\ \frac{2EI}{l^3} (-3lq_3 + 2l^2 q_4) &= -\frac{p_0 l^2}{12}, \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest:

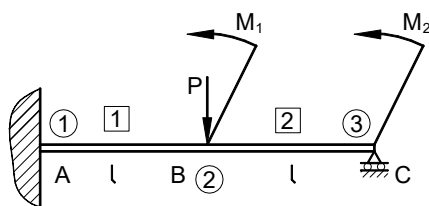
$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{1}{8} \frac{p_0 l^4}{EI} \\ q_4 &= \frac{1}{6} \frac{p_0 l^3}{EI} \end{aligned}$$

Wyznaczając ugięcie, zgodnie ze wzorem (109) otrzymamy

$$w(\xi) = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{6} \right) \frac{p_0 l^2}{EI} \xi^2 + \left(\frac{-2}{8} + \frac{1}{6} \right) \frac{p_0 l}{EI} \xi^3 = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EI} \xi^2 - \frac{p_0 l}{12EI} \xi^3$$

czyli rozwiązanie identyczne z uzyskanym metodą Ritza – przykład 5. Wynik jest oczywisty jeśli zauważymy, że w obu przypadkach stosowaliśmy jako funkcję przybliżającą linię ugięcia wielomian trzeciego stopnia. Różnica polega na przyjęciu różnej parametryzacji (103) o metodzie Ritza i (105) w MES.

W metodzie elementów skończonych nieistotna jest statyczna wyznaczalność lub statyczna niewyznaczalność konstrukcji. Stwierdziliśmy poprzednio, że minimalna liczba odebranych stopni swobody odzwierciedlających warunki podparcia odpowiada odebraniu możliwości ruchu modelu jako ciała sztywnego. Większa liczba warunków podparcia ułatwia jedynie rozwiązanie ponieważ zmniejsza liczbę niewiadomych, a w dużych zadaniach dodatkowo „stabilizuje” rozwiązanie i poprawia dokładność wyników (poprawia uwarunkowanie numeryczne zadania-patrz podrozdział 8.1).

Rys. 28. Belka o długości $2l$ podparta w sposób statycznie niewyznaczalny (przykład 10)**PRZYKŁAD 10**

Obliczyć metodą elementów skończonych ugięcie punktu B belki z rysunku 28.

Rozwiązanie

Przyjmując model obliczeniowy złożony z dwóch elementów skończonych otrzymamy

$$\frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 3l \\ 0 & 4l^2 & l^2 \\ 3l & l^2 & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}.$$

Odwracając macierz powyższego układu równań dostaniemy

$$\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{l}{96EI} \begin{bmatrix} 7l^2 & 3l & -12l \\ 3l & 15 & -12 \\ -12l & -12 & 48 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -P \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}.$$

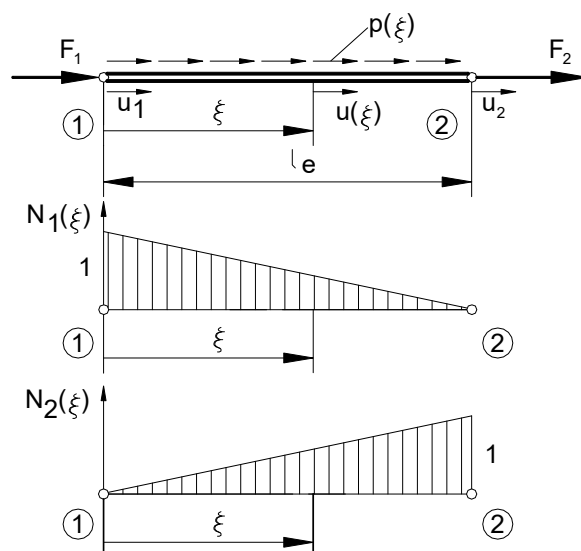
Poszukiwane ugięcie punktu B jest więc równe

$$w_2 = \frac{-7Pl^3}{96EI} + \frac{M_1 l^2}{32EI} - \frac{M_2 l^2}{8EI}$$

Jest to rozwiązanie dokładne, ponieważ rozwiązaniem dokładnym dla segmentu belki nie obciążonej obciążeniem ciągłym jest wielomian trzeciego stopnia, a taki właśnie wielomian jest założoną z góry funkcją ugięcia na elemencie skończonym.

5.2. PRĘTY ROZCIĄGANE I SKRĘCANE. SPRĘŻYNY

Podstawą do zbudowania układu równań metody elementów skończonych jest sformułowanie związków obowiązujących w elemencie skończonym, a także umiejętność budowy macierzy sztywności elementu i wyznaczania równoważnych sił węzłowych od obciążenia ciągłego. Bardzo proste zależności otrzymamy stosując przedstawiony wcześniej sposób postępowania w przypadku rozciągania i skręcania. Przeanalizujemy najpierw najprostszy element pręta rozciąganego lub ściskanego (rys. 29).

Rys. 29. Dwuwzłowy element skończony pręta rozciąganego i funkcje kształtu $N_1(\xi), N_2(\xi)$

Jeżeli przemieszczenie wewnątrz elementu $u(\xi)$ ma być jednoznacznie określone przez przemieszczenia węzłowe u_1 i u_2 to przyjąć można, że $u(\xi)$ jest funkcją liniową

$$u(\xi) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l_e} \xi. \quad (126)$$

Przekształcając $u(\xi)$ do postaci analogicznej jak (105) otrzymamy:

$$u(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) u_1 + \frac{\xi}{l} u_2 = [N_1(\xi), N_2(\xi)] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = [N] \{q\}_e, \quad (127)$$

gdzie

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e,$$

oznacza wektor stopni swobody elementu a

$$[N] = [N_1(\xi), N_2(\xi)],$$

gdzie

$$N_1(\xi) = 1 - \frac{\xi}{l_e}, \quad N_2(\xi) = \frac{\xi}{l_e}, \quad (128)$$

oznacza wektor funkcji kształtu.

Aby znaleźć macierz sztywności wyznaczamy energię odkształcenia sprężystego zgromadzoną w elemencie skończonym. Mamy:

$$U_e = \frac{1}{2} A \int_0^{l_e} \sigma(\xi) \varepsilon(\xi) d\xi = \frac{EA}{2} \int_0^{l_e} (\varepsilon(\xi))^2 d\xi. \quad (129)$$

Ze wzoru (127) otrzymamy

$$\varepsilon(\xi) = \frac{du}{d\xi} = [N', N_2'] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e. \quad (130)$$

Energię sprężystą U_e przedstawić więc można jako

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{EA}{2} \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} q_1, q_2 \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_1', N_2' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e d\xi = \\ &= \frac{EA}{2} \begin{bmatrix} q_1, q_2 \end{bmatrix}_e \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} N_1' N_1' & N_1' N_2' \\ N_2' N_1' & N_2' N_2' \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix}_e [k]_e \{q\}_e, \end{aligned} \quad (131)$$

gdzie

$$[k]_e = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (132)$$

jest macierzą sztywności elementu pręta rozciąganego.

Znajdziemy teraz formuły na wyznaczenie równoważnych sił węzłowych dla dowolnego obciążenia ciągłego

$p(\xi) \begin{bmatrix} \text{N} \\ \text{m} \end{bmatrix}$ działającego na element skończony. W tym celu obliczymy drugi człon w wyrażeniu na całkowitą

energię potencjalną

$$\begin{aligned} W_{ze}^p &= \int_0^{l_e} p(\xi) u(\xi) d\xi = \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} N_1(\xi) p(\xi), N_2(\xi) p(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e d\xi = \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^{l_e} N_1(\xi) p(\xi) d\xi, \int_0^{l_e} N_2(\xi) p(\xi) d\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e. \end{aligned}$$

Wynik możemy zapisać jako

$$W_{ze}^p = \begin{bmatrix} F_1^e, F_2^e \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e,$$

gdzie

$$F_i^e = \int_0^{l_e} N_i(\xi) p(\xi) d\xi, \quad (133)$$

F_i^e nazywamy równoważnymi siłami węzłowymi od obciążenia ciągłego p rozłożonego na danym elemencie.

Budowa układu równań w przypadku pręta rozciąganego przebiega w sposób analogiczny do przedstawionego poprzednio dla belek. W wyniku składania macierzy sztywności elementu dostajemy globalną macierz sztywności

$[K]$. Po określeniu znanych elementów wektora sił węzłowych $\{F\}$ dochodzimy do układu równań:

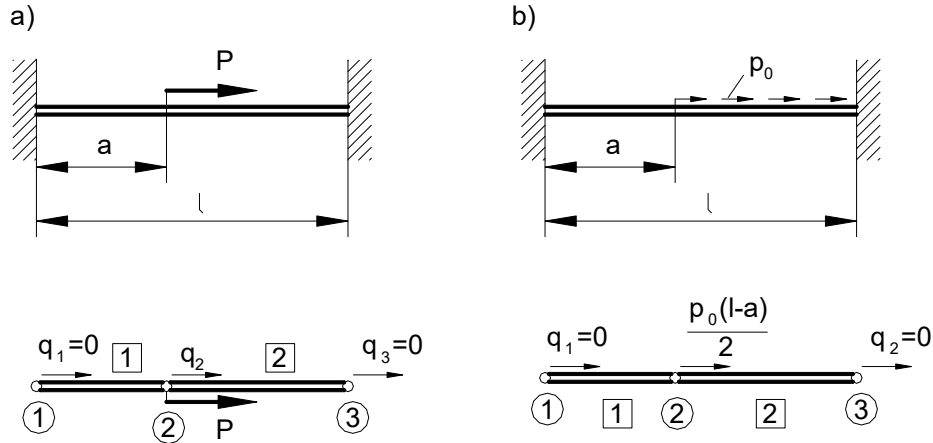
$$[K]\{q\} = \{F\}. \quad (134)$$

Elementy F_i wektora sił węzłowych oznaczają w równaniu (134) całkowite oddziaływanie zewnętrzne odpowiadające i -temu stopniowi swobody. Ponieważ przed rozwiązaniem układu nie znamy wartości reakcji to te spośród sił F_i , które odpowiadają odebranych stopniom swobody pozostają nieznanne. Znanne są natomiast odpowiednie wartości przemieszczeń q_i . Po rozwiązaniu (134) znamy wszystkie składowe wektorów $\{q\}$ i $\{F\}$, a więc przemieszczenia wszystkich węzłów i ich obciążenia, w tym reakcje podpór.

Jeśli interesują nas naprężenia w kolejnych elementach wykorzystujemy wzór

$$\sigma = E\varepsilon = E \left[N_1'(\xi), N_2'(\xi) \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \frac{E(q_2 - q_1)}{l_e}. \quad (135)$$

Napężenie w omawianym elemencie pręta rozciąganego jest więc zawsze stałe.



Rys. 30. Obustronnie utwierdzony pręt obciążony: a) siłą skupioną P ; b) obciążeniem ciągłym p_0 (przykład 11)

PRZYKŁAD 11

Obustronnie utwierdzony pręt o długości l jest obciążony siłą P przyłożoną w odległości a od jednej z podpór (rys. 30a). Obliczyć przemieszczenie punktu przyłożenia siły i reakcje podpór.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy najprostszy model, składający się z dwóch elementów skończonych. Ich macierze sztywności są równe:

$$[k]_e^1 = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [k]_e^2 = \frac{EA}{l-a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Układ równań równowagi ma więc postać:

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} & -\frac{1}{l-a} \\ & -\frac{1}{l-a} & \frac{1}{l-a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}.$$

Uwzględniając, że $q_1 = q_3 = 0$ a $F_2 = P$

$$q_2 = \frac{P(l-a)a}{EA},$$

$$F_1 = \frac{-P(l-a)}{l},$$

$$F_3 = \frac{-Pa}{l}.$$

Ponieważ w węzłach 1 i 3 nie ma innych oddziaływań zewnętrznych to F_1 i F_3 stanowią wartości reakcji podpór. Jeśli zmodyfikujemy zadanie przez zmianę obciążenia (rys. 30b) otrzymamy ze wzoru (133) równoważną siłę węzłową

$$F_2 = \frac{p_0(l-a)}{2},$$

i po rozwiązaniu układu

$$q_2 = \frac{p_0(l-a)^2 a}{2lEA},$$

$$F_1 = \frac{-p_0(l-a)^2}{2l},$$

$$F_3 = \frac{-p_0 a(l-a)}{2l}.$$

Reakcja w węźle pierwszym jest równa F_1 natomiast żeby wyliczyć reakcję w węźle trzecim należy uwzględnić wartość równoważnej siły węzłowej od obciążenia ciągłego przypadająca na ten węzeł:

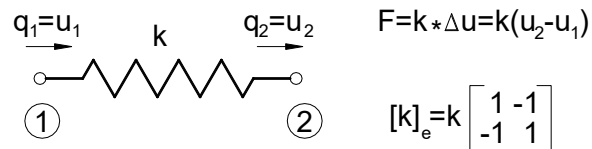
$$R_1 = F_1 = \frac{-p_0 a(l-a)}{2l} - \frac{p_0(l-a)l}{2l} = \frac{-p_0(l-a)(l+a)}{2l}.$$

Suma reakcji jest więc równa

$$R_1 + R_3 = -p_0(l-a).$$

Warto zauważyć, że rozwiązanie dla pręta z rysunku 30a jest rozwiązaniem ścisłym a dla pręta z rysunku 30b rozwiązaniem przybliżonym.

Macierz sztywności sprężyny o sztywności k (rys. 31) możemy określić w podobny sposób jak dla pręta rozciąganego.



Rys. 31. Sprężyna jako element skończony

Energia odkształcenia sprężystego jest równa

$$U_e = \frac{1}{2} F \Delta u = \frac{1}{2} k (\Delta u)^2 = \frac{1}{2} k (u_2 - u_1)(u_2 - u_1). \quad (136)$$

Wynik możemy zapisać w postaci

$$U_e = \frac{1}{2} [u_1, u_2] \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix},$$

$$U_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e,$$

gdzie

$$[k]_e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad (137)$$

jest macierzą sztywności elementu skończonego sprężyny. Macierz (137) można też otrzymać bezpośrednio z macierzy sztywności pręta rozciąganego (132) podstawiając

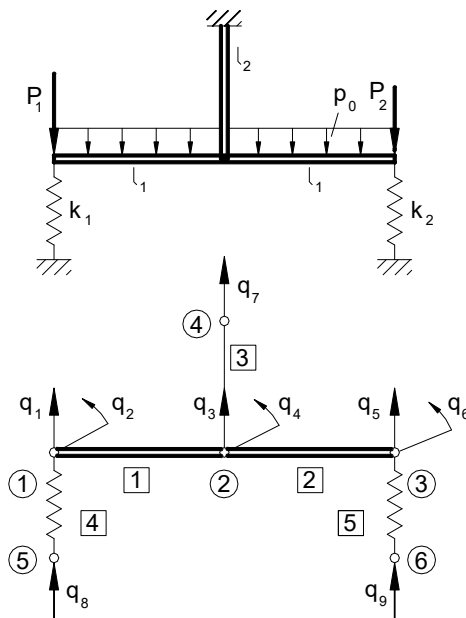
$$\frac{EA}{l_e} = k.$$

Postępując w podobny sposób łatwo znajdziemy macierz sztywności elementu pręta skręcanego, w którym mamy dwa stopnie swobody kąty skręcenia końców:

$$[k]_e = \frac{GI_s}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (138)$$

gdzie GI_s jest sztywnością pręta na skręcanie.

Znając formuły określające macierze sztywności dla różnych elementów konstrukcyjnych możemy w standardowy sposób analizować konstrukcje złożone. Macierz $[K]$ układu równań metody elementów skończonych jest budowana z uwzględnieniem przyjętej numeracji węzłów i stopni swobody. Zmiana numeracji stopni swobody zmieni sam układ równań nie zmieniając oczywiście wyników zadania.



Rys. 32. Model MES konstrukcji złożonej z różnych elementów konstrukcyjnych (przykład 12)

PRZYKŁAD 12

Sformułować układ równań $[K]\{q\} = \{F\}$ dla konstrukcji składającej się z belki, dwóch sprężyn i pręta rozciąganego (rys. 32).

Rozwiązanie

Przyjmijmy podział belki na 2 elementy skończone. Model konstrukcji obejmuje dodatkowe 2 elementy skończone odpowiadające sprężynom oraz element pręta rozciąganego. Model opisany jest przez 9 stopni swobody q_i . Macierze sztywności elementów belkowych są określone przez wzór:

$$[k]_e^1 = [k]_e^2 = \frac{2EI}{l_1^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l_1 & -6 & 3l_1 \\ 3l_1 & 2l_1^2 & -3l_1 & l_1^2 \\ -6 & -3l_1 & 6 & -3l_1^2 \\ 3l_1 & l_1^2 & -3l_1 & 2l_1^2 \end{bmatrix}.$$

Stopnie swobody elementu pierwszego to q_1, q_2, q_3, q_4 , a elementu drugiego q_3, q_4, q_5, q_6 .

Macierz sztywności elementu pręta rozciąganego jest równa

$$[k]_e^3 = \frac{EA}{l_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stopnie swobody tego elementu w globalnym wektorze to q_3 i q_4 .

Macierze sztywności sprężyn są równe:

$$[k]_e^4 = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [k]_e^5 = k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a odpowiadające im stopnie swobody to q_8 i q_1 oraz q_9 i q_5 .

Układ równań $[K]\{q\} = \{F\}$ dla przyjętej numeracji stopni swobody będzie miał postać:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-p_0 l_1}{2} - P_1 \\ \frac{-p_0 l_1^2}{12} \\ p_0 l_1 \\ 0 \\ \frac{-p_0 l_1}{2} - P_2 \\ \frac{p_0 l_1^2}{12} \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{Bmatrix}$$

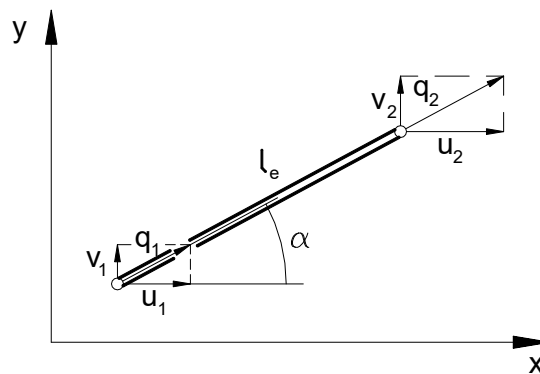
- elementy macierzy szt. elementu 1 (belka),
- elementy macierzy szt. elementu 2 (belka),
- elementy macierzy szt. elementu 3 (pręt),
- elementy macierzy szt. elementu 4 (sprężyna),
- elementy macierzy szt. elementu 5 (sprężyna).

Macierz układu równań $[K]$ można zapisać stosując symbole k_{ij}^m , oznaczające składowe (i, j) macierzy sztywności elementu skończonego m .

$$[K]_{9 \times 9} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline k_{11}^1 + k_{22}^4 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & k_{12}^4 & 0 \\ \hline k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 + k_{11}^3 & k_{34}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & k_{12}^3 & 0 & 0 \\ \hline k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 + k_{21}^2 & k_{44}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 + k_{22}^5 & k_{34}^2 & 0 & 0 & k_{12}^5 \\ \hline 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & k_{21}^3 & 0 & 0 & 0 & k_{11}^3 & 0 & 0 \\ \hline k_{21}^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11}^4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^5 & 0 & 0 & 0 & k_{11}^5 \\ \hline \end{array}$$

5.3. KRATOWNICE I RAMY PŁASKIE

Związki obowiązujące w poszczególnych prętowych elementach skończonych, a także kierunki przemieszczeń uogólnionych opisywane były dotychczas w lokalnych, elementowych układach współrzędnych. W takich konstrukcjach jak na przykład kratownica, gdzie musimy zapewnić ciągłość przemieszczeń na połączeniach między różnie nachylonymi prętami wygodniejsze jest stosowanie globalnego układu współrzędnych. Załóżmy, że analizowany pręt (element) kratownicy jest nachylony pod kątem α w stosunku do osi x globalnego kartezjańskiego układu współrzędnych (rys. 33). Poszukujemy związków między lokalnymi stopniami swobody elementu $\{q\}_e = [q_1, q_2]_e$ (przemieszczenia wzdłuż osi pręta), a stopniami swobody tego elementu w globalnym układzie współrzędnych $\{q_g\}_e = [u_1, v_1, u_2, v_2]_e$.



Rys. 33. Element skończony pręta kratownicy

Dla obu węzłów elementu ($i = 1, 2$) otrzymujemy

$$q_i = u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha. \quad (139)$$

Poszukiwany związek ma więc postać:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}_e, \quad (140)$$

czyli

$$\{q\}_e = [T_k] \{q_g\}_e. \quad (141)$$

Energję sprężystą elementu można więc zapisać w formie

$$U_e = \frac{1}{2} \underset{1 \times 2}{[q]} \underset{2 \times 2}{[k]} \underset{2 \times 1}{\{q\}}_e = \frac{1}{2} \underset{1 \times 4}{[q_g]} \underset{4 \times 2}{[T_k]^T} \underset{2 \times 2}{[k]} \underset{2 \times 4}{[T_k]} \underset{4 \times 1}{\{q_g\}}_e, \quad (142)$$

lub

$$U_e = \frac{1}{2} \underset{1 \times 4}{[q_g]} \underset{4 \times 4}{[k_g]} \underset{4 \times 1}{\{q_g\}}_e, \quad (143)$$

gdzie

$$\left[k_g \right]_e = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}. \quad (144)$$

$$s = \sin \alpha, \quad c = \cos \alpha$$

Otrzymaliśmy więc macierz sztywności elementu kratownicy w globalnym układzie współrzędnych kartezjańskich. Kratownica płaska o LW węzłach ma więc $2LW$ stopnie swobody odpowiadające pionowym i poziomym przemieszczeniom wszystkich węzłów.

PRZYKŁAD 13.

Zbudować układ równań MES dla kratownicy z rysunku 34. Jakie jest przemieszczenie węzła 4 jeśli $\beta_1 = \beta_2$ a siła P przyłożona jest poziomo ($\gamma = 0$).

Rozwiązanie

Ustrój składa się z trzech elementów.

Element 1 określony przez węzły 1i 4 jest nachylony pod kątem $\alpha_1 = \beta_1$ i ma długość $l_1 = \frac{l}{\cos \alpha_1}$.

Element 2 określony przez węzły 2 i 4 jest nachylony pod kątem $\alpha_2 = 0$ i ma długość $l_2 = \frac{l}{\cos \alpha_2}$.

Element 3 określony przez węzły 3 i 4 jest nachylony pod kątem $\alpha_3 = -\beta_2$ i ma długość $l_3 = \frac{l}{\cos \alpha_3}$.

Każda z macierzy sztywności tych elementów $[k_{ij}]_e^1, [k_{ij}]_e^2, [k_{ij}]_e^3$ jest zdefiniowana przez wzór (144) gdzie l_e i α są długością i kątem nachylenia odpowiednich elementów.

Pełny układ równań ma więc postać:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ 0 & 0 & k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & 0 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ 0 & 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 & 0 & 0 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^1 + k_{33}^2 + k_{33}^3 & k_{34}^1 + k_{34}^2 + k_{34}^3 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^1 + k_{43}^2 + k_{43}^3 & k_{44}^1 + k_{44}^2 + k_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ P \cos \gamma \\ P \sin \gamma \end{Bmatrix}.$$

Uwzględniając, że $q_j = 0$ dla $j = 1, 6$ możemy układ zredukować do

$$EA \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{c_i^2}{l_i} & \sum_{i=1}^3 \frac{s_i c_i}{l_i} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{s_i c_i}{l_i} & \sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{l_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \sin \gamma \\ P \cos \gamma \end{Bmatrix}.$$

Zakładając, że $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ i $\gamma = 0$ mamy

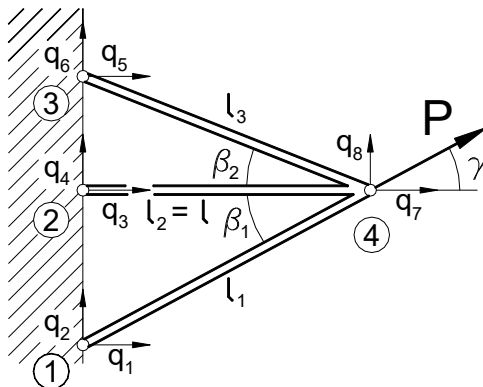
$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 + 2c^3 & 0 \\ 0 & 2s^2 c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix},$$

gdzie $c = \cos \beta$, $s = \sin \beta$.

Stąd

$$q_7 = \frac{Pl}{EA(1+2c^3)},$$

$$q_8 = 0.$$

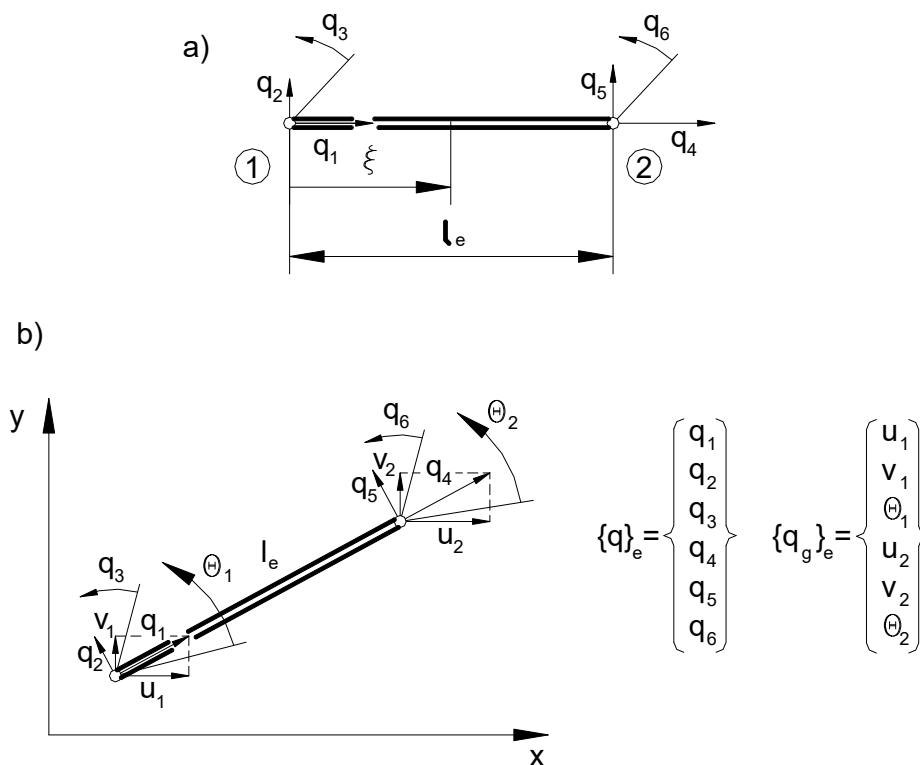


Rys. 34. Kratownica z przykładu 13

Związki otrzymane dla elementu pręta rozciąganego i belki mogą być wykorzystane do budowy elementu skończonego ramy dwuwymiarowej. Element ramy możemy potraktować jako strukturę będącą połączeniem elementu belki i pręta. Przyjmując numerację stopni swobody z rysunku 35a i wykorzystując znane macierze sztywności belki (115) i pręta rozciąganego (132) otrzymamy macierz sztywności elementu ramy płaskiej:

$$[k]_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_e^3} & \frac{6EI}{l_e^2} & 0 & \frac{-12EI}{l_e^3} & \frac{6EI}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_e^2} & \frac{4EI}{l_e} & 0 & \frac{-6EI}{l_e^2} & \frac{2EI}{l_e} \\ -\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{l_e^3} & \frac{-6EI}{l_e^2} & 0 & \frac{12EI}{l_e^3} & \frac{-6EI}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_e^2} & \frac{2EI}{l_e} & 0 & \frac{-6EI}{l_e^2} & \frac{4EI}{l_e} \end{bmatrix}. \quad (145)$$

Element ten ma więc 6 stopni swobody a jego deformacja jest określona przez przemieszczenia $u(\xi)$ i $w(\xi)$ w lokalnym układzie współrzędnych związanym z węzłami 1 i 2 (rys. 35b).



Rys. 35. Element ramy dwuwymiarowej (a); Stopnie swobody elementu ramy w układzie lokalnym $\{q\}_e$ i globalnym $\{q_g\}_e$ (b)

Łatwo stwierdzić, że przemieszczenia uogólnione np. węzła 1 w lokalnym i globalnym układzie współrzędnych wiążą zależność:

$$\begin{cases} q_1 = u_1 \cos \alpha + v_1 \sin \alpha, \\ q_2 = -u_1 \sin \alpha + v_1 \cos \alpha, \\ q_3 = \theta_1. \end{cases}$$

Otrzymamy stąd zależności:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}_e = [T_r] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [T_r] \cdot \{q_g\}_e, \quad (146)$$

gdzie macierz transformacji $[T_r]$ ma postać

$$[T_r] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (147)$$

Energia sprężysta zgromadzona w elemencie jest równa

$$U_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e = \frac{1}{2} [q_g]_e [T_r]^T [k]_e [T_r] \{q_g\}_e, \quad (148)$$

$$U_e = \frac{1}{2} [q_g]_e [k^g]_e \{q_g\}_e,$$

gdzie

$$[k^g]_e = [T_r]^T [k]_e [T], \quad (149)$$

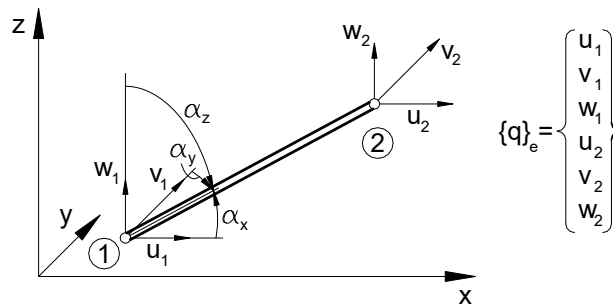
jest macierzą sztywności elementu ramy dwuwymiarowej w globalnym układzie współrzędnych.

5.4. PRZESTRZENNE KRATOWNICE I RAMY

Związki otrzymane dla kratownic i ram dwuwymiarowych można stosunkowo łatwo uogólnić na konstrukcje trójwymiarowe. Przyjmijmy oznaczenia dla elementu kratownicy trójwymiarowej przedstawione na rysunku 36. Postępując podobnie jak w przypadku dwuwymiarowym otrzymamy macierz sztywności w układzie globalnym x,y,z :

$$[k^g]_e = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z & -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z \\ c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z & -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z \\ c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 & -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 \\ -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z & c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z \\ -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z & c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z \\ -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 & c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 \end{bmatrix}, \quad (150)$$

gdzie $c_x = \cos \alpha_x$, $c_y = \cos \alpha_y$, $c_z = \cos \alpha_z$.



Rys. 36. Element skończony kratownicy trójwymiarowej

Macierz sztywności elementu belki 3-wymiarowej (rys. 37) można zbudować przez złożenie znanych już macierzy sztywności dla rozciągania (132), skręcania (138) i zginania (115).

Rozwiązywanie trójwymiarowych konstrukcji prętowych metodą elementów skończonych jest obliczeniowo złożone: jeden element skończony kratownicy ma 6 stopni swobody, a rama 12 stopni swobody. Dlatego nawet proste obliczenia wykonywane są technikami komputerowymi. Warto tu podkreślić, że wykonywanie wszelkich obliczeń metodą elementów skończonych bez zastosowania komputera jest zwykle nieefektywne i ma jedynie znaczenie dydaktyczne, poznawcze. Atutem metody jest uniwersalizm podejścia i prosta automatyzacja obliczeń uzyskane kosztem dużej liczby operacji arytmetycznych potrzebnych do otrzymania rozwiązania.